2016年 工学部・生命環境（生命工）第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ に対し，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) $f(x)$ の増減を調べよ．ただし，$f(x)$ の第2次導関数を調べる必要はない．

(2) C 上の点 $(1,\ \sqrt{3})$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) C の $0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の部分，直線 $x=\sqrt{2}$ および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(4) C と x 軸の $x\geqq 0$ の部分で囲まれた図形を D とする．D を y 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

(1) $f(x)$ の定義域は $-2\leqq x\leqq 2$ であり，

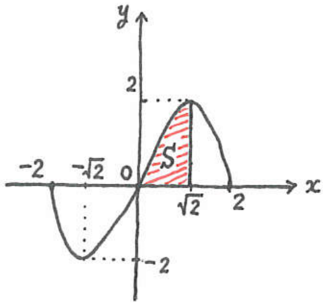
$$f'(x)=1\cdot\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

よって増減表は右のようになる

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

(2) $f'(1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ より，$\ell: y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-1)+\sqrt{3}$　　すなわち，$\underline{\ell: y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}}$ //

(3) 右図より，



$$S=\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$t=4-x^2$ とおいて置換積分する．$dt=-2x\,dx$，
$\begin{array}{c||c} x & 0\to\sqrt{2} \\ \hline t & 4\to 2 \end{array}$

$$\begin{aligned} S&=\int_4^2 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt \\ &=\frac{1}{2}\int_2^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt \\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\right) \\ &=\underline{\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})} \text{ //} \end{aligned}$$

(4) $y=x\sqrt{4-x^2}$ とおくと，$y^2=x^2(4-x^2)$

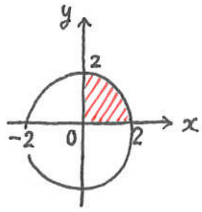
$\therefore\ x^4-4x^2+y^2=0$

よって，$x^2=2\pm\sqrt{4-y^2}$

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^2 x_+^2\,dy-\pi\int_0^2 x_-^2\,dy \\ &=\pi\int_0^2 2+\sqrt{4-y^2}\,dy-\pi\int_0^2 2-\sqrt{4-y^2}\,dy \\ &=2\pi\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy \end{aligned}$$

ここで，$x=\sqrt{4-y^2}\iff x^2+y^2=4$

となり，積分部分は次の斜線部の面積に等しい



よって，

$$\begin{aligned} V&=2\pi\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{4} \\ &=\underline{2\pi^2} \text{ //} \end{aligned}$$