金沢大学

2012年 理系 第3問　1枚目／3枚

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする．$\tan x = t$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$$

であることを示せ．

(2) (1) を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ．

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ．

(4) (2) と (3) を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ．

(1) $\tan x = t$ とおく．$\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot dx = dt$ ，

x	$0 \to \frac{\pi}{4}$
t	$0 \to 1$

これを用いて．置換積分する．

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt \quad ▨$$

(2) (1)の式において．$f(t) = t^n$ とすると．

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

また．$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において．$0 < \cos^2 x \leqq 1$ であるから $\dfrac{1}{\cos^2 x} \geqq 1$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{n+1} \quad ▨$$

金沢大学

2012年 理系 第3問　　2枚目／3枚

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする．$\tan x = t$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$$

であることを示せ．

(2) (1) を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ．

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ．

(4) (2) と (3) を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ．

(3) $0 \leqq x < \frac{\pi}{4}$ のとき．$0 \leqq \tan x < 1$　∴ 左辺の分子は．初項 1，公比 $-\tan^2 x$ の等比数列の和

であり，$-1 < -\tan^2 x \leqq 0$ であるから．等比数列の和の公式より．

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-(-\tan^2 x)^{n+1}}{1-(-\tan^2 x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot\left\{1-(-1)^{n+1}\cdot\tan^{2(n+1)} x\right\}$$

$\dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$ なので

$$= 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

これは．$x = \frac{\pi}{4}$ すなわち $\tan x = 1$ のときも成り立っている ■

このときは公比が -1 となるので，別に書く必要がある．(和の公式が使えない)

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ とおく

(3) より．$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}-\frac{\tan^6 x}{\cos^2 x}+\cdots+\frac{(-1)^n\tan^{2n}x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x\,dx$

∴ (2) より．$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x\,dx$

∴ $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x\,dx$

0001244275578999

金沢大学

2012年 理系 第3問　3枚目／3枚

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする．$\tan x = t$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$$

であることを示せ．

(2) (1) を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ．

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ．

(4) (2) と (3) を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ．

(4) のつづき．

$$\therefore\ S_n = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x\,dx \quad \cdots (*)$$

(2) より．

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x\,dx \leqq \frac{1}{2n+3}$$

∴ (*) より．

$$\frac{\pi}{4} - \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{\to 0} \leqq S_n \leqq \frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{\to 0}$$

∴ はさみうちの原理 より．

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$$