



2015年農・文化教育学部 第3問

3 a を定数とし、関数

$$f(\theta) = \sin^3 \theta + a \cos 2\theta + \frac{21}{4} \sin \theta$$

は $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{13}{4}$ を満たすものとする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
 (2) $t = \sin \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を t を用いて表せ。
 (3) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

$$(1) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - a + \frac{21}{4}$$

$$\therefore 1 - a + \frac{21}{4} = \frac{13}{4} \quad \therefore \underline{a = 3} //$$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ より、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= t^3 + 3(1 - 2t^2) + \frac{21}{4}t \\ &= \underline{t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3} // \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた t の関数を $g(t)$ とおくと、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $-1 \leq t \leq 1$

$$g(t) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 12t + \frac{21}{4} \\ &= \frac{3}{4}(4t^2 - 16t + 7) \\ &= \frac{3}{4}(2t - 1)(2t - 7) \end{aligned}$$

t	-1	...	$\frac{1}{2}$...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	\nearrow	$\frac{17}{4}$	\searrow	$\frac{13}{4}$

$$t = -1 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

増減表は右のようになる

\therefore 最大値は $\frac{17}{4}$ ($\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき)、最小値は $-\frac{37}{4}$ ($\theta = -\frac{\pi}{2}$ のとき) //