



2014年 総合理工 (数理・情報システム) 第4問

4 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. x を実数とし, 行列

$$X = \begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$$

を定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 自然数 n に対して X の n 乗を $X^n = \begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ R_n(x) & S_n(x) \end{pmatrix}$ とおく. このとき, すべての n に対して, $x = \frac{1}{2}$ のとき, $Q_n(x) = 0$ であることを示せ. また, すべての n に対して, $x = \frac{2}{3}$ のとき, $R_n(x) = 0$ であることを示せ.
- (2) a と b は定数とする. このとき, $X^2 + aX + bE = O$ をみたす実数 x が存在するための a, b の条件を求めよ.
- (3) $X^3 = O$ をみたす実数 x は存在しないことを証明せよ.