

2013年理系第3問

1枚目 / 2枚

3 xy 平面上的2点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ に対して, $d(P_1, P_2)$ を

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

で定義する. いま点 $A(3, 0)$ と点 $B(-3, 0)$ に対して,

$$d(Q, A) = 2d(Q, B)$$

を満たす点 Q からなる図形を T とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ.
- (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ.
- (3) 点 C の座標を $(13, 8)$ とする. 点 D が T 上を動くとき, $d(D, C)$ の最小値を求めよ.

(1) $(a, b) \in T$ とすると,

$$d((a, b), A) = 2d((a, b), B) \quad \text{すなわち} \quad |a-3| + |b| = 2(|a+3| + |b|)$$

が成り立つ. ここで $|b| = |-b|$ より

$$|a-3| + |-b| = 2(|a+3| + |-b|)$$

$$\therefore d((a, -b), A) = 2d((a, -b), B) \quad \therefore (a, -b) \in T \text{ となる} \quad \square$$

(2) (1)の結果より, 図形 T は x 軸に関して対称であるから.

$y \geq 0$ の場合を考える.

$$\text{このとき, } (x, y) \in T \text{ とすると, } |x-3| + y = 2(|x+3| + y)$$

(i) $x \geq 3$ のとき.

$$x-3+y = 2x+6+2y \quad \therefore y = -x-9 \text{ となる.}$$

(ii) $-3 \leq x < 3$ のとき.

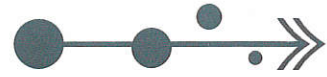
$$3-x+y = 2x+6+2y \quad \therefore y = -3x-3 \text{ となる}$$

(iii) $x < -3$ のとき

$$3-x+y = -2x-6+2y \quad \therefore y = x+9 \text{ となる}$$

(i) ~ (iii) より, $y < 0$ のときも考えて, 下の図のようになる

二つのV字型.



2013年理系第3問

2枚目 / 2枚

3 xy 平面上の2点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ に対して, $d(P_1, P_2)$ を

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

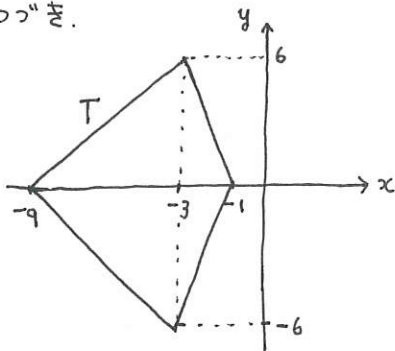
で定義する. いま点 $A(3, 0)$ と点 $B(-3, 0)$ に対して,

$$d(Q, A) = 2d(Q, B)$$

を満たす点 Q からなる図形を T とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ.
- (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ.
- (3) 点 C の座標を $(13, 8)$ とする. 点 D が T 上を動くとき, $d(D, C)$ の最小値を求めよ.

(2) のつぎ.



∴ T で囲まれる領域の面積は.

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 = \underline{48}$$

(3) $D(x, y)$ とおくと.

$$d(D, C) = |x - 13| + |y - 8|$$

ここで, $-9 \leq x \leq -1$, $-6 \leq y \leq 6$ より, $x - 13 < 0$, $y - 8 < 0$

$$\therefore d(D, C) = 21 - x - y$$

∴ $x + y$ の値が最大 $\Leftrightarrow d(D, C)$ が最小 となる.

$$x + y = k \text{ とおくと } y = -x + k$$

∴ $(-3, 6)$ を通るとき, k が最大となる. ∴ $6 = 3 + k$ ∴ $k = 3$

∴ $d(D, C)$ の最小値は 18 ($D(-3, 6)$ のとき)

