0001977632208999

岡山大学

2015年 理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ nを2以上の自然数とし，1からnまでの自然数kに対して，番号kをつけたカードをそれぞれk枚用意する．これらすべてを箱に入れ，箱の中から2枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ．

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ．

(2) 引いたカード2枚の番号が両方ともkである確率をnとkの式で表せ．

(3) 引いたカード2枚の番号が一致する確率をnの式で表せ．

(4) 引いたカード2枚の番号が連続している確率（すなわち，2つの番号の差の絶対値が1である確率）をnの式で表せ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \underline{\frac{1}{2}n(n+1) \text{ 枚}}$ //

(2) (1)で求めた全てのカードの枚数を N とおくと，

求める確率は．$\dfrac{{}_kC_2}{{}_NC_2} = \dfrac{k(k-1)}{N(N-1)} = \dfrac{k(k-1)}{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}}$ $(k \geqq 2)$

$\therefore$ $\underline{\dfrac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}}$ // これは $k=1$ のときも成り立つ

(3) (2)の結果を $k=1,2,\cdots,n$ について足すと，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2-k\right)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2-k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \dfrac{1}{3}(n-1)(n+1)n$

$\therefore$ 求める確率は．$\dfrac{\frac{4}{3}(n-1)n(n+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \underline{\dfrac{4}{3(n+2)}}$ //

(4) k と $k+1$ を取り出す確率は $(k=1,2,\cdots,n-1)$

$$\frac{{}_kC_1\cdot{}_{k+1}C_1}{{}_NC_2} = \frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$\therefore$ これを $k=1,2,\cdots,n-1$ について足して．

$$\frac{8}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2+k\right) = \frac{\frac{8}{3}n(n-1)(n+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \underline{\frac{8}{3(n+2)}}$$ //