



2013年理系第2問

2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定まる座標平面上の1次変換を f とする。ただし、 a, b は実数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 原点 O とは異なる点 $P(x, y)$ を f で移した点を Q とする。このとき、長さの比の値 $\frac{OQ}{OP}$ は P によらないことを示し、その値を a, b を用いて表せ。

(2) 正の整数 n に対して、 $A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とするとき、

$$p_n^2 + r_n^2 = (a^2 + b^2)^n, \quad q_n^2 + s_n^2 = (a^2 + b^2)^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) $109^2 = l^2 + m^2$ を満たす正の整数 l, m を一組求めよ。