0000061336683999

室蘭工業大学

2012年 工学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ s, tを実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} s & t \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とする．$P=-A+4E$に対して，$P^2=P$が成り立つとする．

(1) s, tの値を求めよ．

(2) a, bを相異なる実数とする．$AP\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$を満たす実数$\lambda$の値を求めよ．

(3) 数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$を$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$と定める．数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$の一般項を求めよ．

(1) $P^2=(-A+4E)^2$

$=A^2-8A+16E$

$=\begin{pmatrix} s^2-2t & st+6t \\ -2s-12 & -2t+36 \end{pmatrix}-8\begin{pmatrix} s & t \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+16\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} s^2-8s-2t+16 & st-2t \\ -2s+4 & -2t+4 \end{pmatrix}$

$P=-A+4E$

$=\begin{pmatrix} -s+4 & -t \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

よって，$P^2=P$より，$\underline{s=1,\ t=3}$ //

(2) (1)より，$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\therefore AP=\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

$\therefore AP\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9a-9b \\ 6a-6b \end{pmatrix}$

$\lambda P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 3a-3b \\ 2a-2b \end{pmatrix}$

$\therefore AP\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\underline{\lambda=3}$ //

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\therefore x_1=3,\ y_1=2$

$\therefore \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^{n-1}P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=A^{n-2}\cdot 3P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=3A^{n-2}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=3^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\therefore \underline{x_n=3^n,\ y_n=2\cdot 3^{n-1}}$ //