0002122367787999

お茶の水女子大学

2015年 第2問

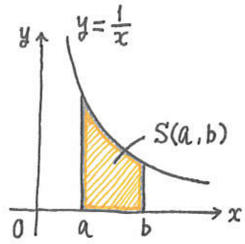
$\boxed{2}$ $0 < a < b$ を満たす実数 a, b に対し，曲線 $y = \dfrac{1}{x}$，x 軸及び 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を $S(a,\ b)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) n を自然数とする．$S(n,\ 3n)$ を求め，この値は n によらないことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n,\ n+\sqrt{n}) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} S(n,\ n+k)$$



(1) $S(n, 3n) = \displaystyle\int_n^{3n} \frac{1}{x}\,dx$

$= \Big[\log x\Big]_n^{3n}$

$= \log 3n - \log n$

$= \underline{\log 3 \ (定数)}$ //

よって．n によらない 定数 になる ■

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n, n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+\sqrt{n}} \frac{1}{x}\,dx$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big[\log x\Big]_n^{n+\sqrt{n}}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \log \frac{n+\sqrt{n}}{n}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\Big(\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 1}\Big)$

$= 0$ ■

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} S(n, n+k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_n^{n+k}\frac{1}{x}\,dx$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$　$k=1,\cdots n$ と $k=n+1,\cdots,2n$ に分ける

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$

$= \displaystyle\int_0^1 \log(1+x)\,dx + \int_0^1 \log(2+x)\,dx$

(つづき.)

$= \displaystyle\int_0^1 (1+x)'\log(1+x)\,dx + \int_0^1 (2+x)'\log(2+x)\,dx$

$= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 dx$

$\quad + \Big[(2+x)\log(2+x)\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 dx$

$= 2\log 2 - 1 + 3\log 3 - 2\log 2 - 1$

$= \underline{3\log 3 - 2}$ //