滋賀県立大学

2013年 環境科学部・工学部 第3問

$\boxed{3}$ 四面体の4つの頂点をA_1，A_2，A_3，A_4とし，空間のある点Pに関するそれぞれの位置ベクトルを$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，$\overrightarrow{a_4}$とする．いま$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$を順にT_1，T_2，T_3，T_4で表しその重心をそれぞれG_1，G_2，G_3，G_4とする．

(1) 点Hを$\overrightarrow{PH} = \dfrac{\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}}{4}$を満たす点とすると，4つの直線$A_iG_i$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）はHで交わることを示せ．

(2) 「直線A_iHはT_iを含む平面に直交する（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）」という条件が成り立つと仮定する．このときPとしてHを選べば，$\overrightarrow{a_j}$と$\overrightarrow{a_k}$の内積$\overrightarrow{a_j}\cdot\overrightarrow{a_k}$（$j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4$）の値は$j \neq k$を満たすどの$j$，$k$に対しても同じであることを示せ．

(3) (2)の条件が成り立てば，四面体$A_1A_2A_3A_4$は正四面体であることを示せ．