

2010年第2問

2 座標空間において、8点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 0)$, $G(1, 1, 1)$ をとり、この8点を頂点とする立方体を Q とする。また点 $P(x, y, z)$ と正の実数 t に対し、6点 $(x+t, y, z)$, $(x-t, y, z)$, $(x, y+t, z)$, $(x, y-t, z)$, $(x, y, z+t)$, $(x, y, z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(P)$, その外部の領域を $\beta_t(P)$ で表す。ただし、立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t \leq 1$ のとき、 Q と $\alpha_t(O)$ の共通部分 $Q \cap \alpha_t(O)$ の体積を t で表せ。
- (2) $Q \cap \beta_1(O) \cap \beta_1(D) \cap \beta_1(E) \cap \beta_1(F)$ の体積を求めよ。
- (3) $\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき、 $Q \cap \alpha_t(O) \cap \alpha_t(A)$ の体積を t で表せ。
- (4) t が $0 < t \leq 1$ の範囲で変化するとき、 $Q \cap \alpha_t(O) \cap \beta_t(A) \cap \beta_t(B) \cap \beta_t(C)$ の体積が最大となる t の値を求めよ。