

2010年第3問

3 数列 $\{a(n)\}$ を $a(1) = 1$ および $n \geq 1$ に対して

$$\begin{cases} a(2n) = 3a(n) \\ a(2n+1) = 2a(n) + a(n+1) \end{cases}$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

(1) $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$, $a(5)$ を求めよ。

次に数列 $\{b(n)\}$ を $b(1) = a(1)$ および $n \geq 2$ に対して

$$b(n) = a(n) - a(n-1)$$

で定義する。

(2) $b(2)$, $b(3)$, $b(4)$, $b(5)$ を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して、

$$\begin{cases} b(2n) = 2b(n) \\ b(2n+1) = b(n+1) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) 自然数 k に対して $b(2^k)$ および $b(2^k + 1)$ を計算せよ。

(5) 自然数 k に対して $a(2^k - 1)$ を計算せよ。