



2015年理学部(数理)第4問

数理
石井K

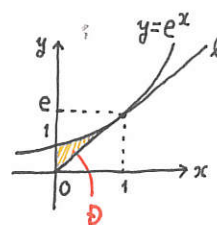
4 曲線 $y = e^x$ 上の点 $A(1, e)$ における接線 l と x 軸との交点を $B(b, 0)$ とする. この曲線と直線 l および直線 $x = b$ で囲まれた図形を D とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) b を求めよ.
- (2) 図形 D の面積 S を求めよ.
- (3) 定積分 $\int_1^e (\log y)^2 dy$ を求めよ.
- (4) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

(1) $y' = e^x$ より, $l: y = e(x-1) + e \quad \therefore l: y = ex \quad \therefore x$ 軸との交点は $(0, 0) \quad \therefore b = 0$ //

(2) 右のグラフより

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 e^x - ex \, dx \\ &= \left[e^x - \frac{e}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned} //$$



$$\begin{aligned} (3) \int_1^e (y)' (\log y)^2 dy &= \left[y (\log y)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e (y)' \log y \, dy \\ &= e - 2 \left[y \log y \right]_1^e + 2 \int_1^e dy \\ &= e - 2e + 2(e-1) \\ &= e - 2 \end{aligned} //$$

(4) $V = \pi \int_1^e (\log y)^2 dy$ $\xrightarrow{y=e^x \Leftrightarrow x=\log y}$ //

$$= \pi \cdot 1^2 \cdot e \cdot \frac{1}{3} - \pi(e-2) \quad (\because (3) \text{より})$$

$$= \frac{\pi e}{3} - \pi e + 2\pi$$

$$= \left(2 - \frac{2e}{3} \right) \pi //$$