大分大学

2016年 経済学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 大きさ1のベクトル $\vec{a}$ と，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{b}$ のなす角を θ とする．

(1) $\left|3\vec{a}+t\vec{b}\right|$ が最小となるような実数 t の値を $|\vec{b}|$，θ を用いて表しなさい．

(2) $\left|3\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．$|\vec{b}|$ および $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(1) $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\cos\theta$ より，

$$
\begin{aligned}
|3\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2+6t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\
&= |\vec{b}|^2t^2+6|\vec{b}|\cos\theta\cdot t+9\\
&= |\vec{b}|^2\left(t^2+\frac{6}{|\vec{b}|}\cos\theta\cdot t\right)+9\\
&= |\vec{b}|^2\left(t+\frac{3}{|\vec{b}|}\cos\theta\right)^2-9\cos^2\theta+9\\
&= |\vec{b}|^2\left(t+\frac{3}{|\vec{b}|}\cos\theta\right)^2+9\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は $3\sin\theta$ で そのとき，$\underline{t=-\dfrac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}}$ //

ただし，$0\leqq\theta\leqq180^\circ$ として考えた．

(2) (1) より，

$$-\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{2} \text{ かつ } 3\sin\theta=2\sqrt{2} \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

よって，$|\vec{b}|=6\cos\theta$ かつ $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$|\vec{b}|>0$ より，$\cos\theta>0$ なので，$\underline{\cos\theta=\dfrac{1}{3},\ |\vec{b}|=2}$ //