2015 年 工学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 曲線 $C : 4x^2 + 9y^2 = 36$ $(x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第 1 象限にある．点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

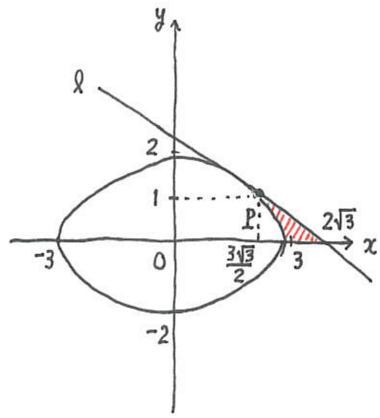
(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

(1) $4\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 9y_1^2 = 36$ $\quad \therefore y_1^2 = 1$ $\quad y_1 > 0$ より. $\underline{y_1 = 1}$ //

(2) $4\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\cdot 1\cdot y = 36$ $\quad \therefore \underline{\ell : y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x + 4}$ //

(3) (2) で求めた式に $y = 0$ を代入して. $\underline{x = 2\sqrt{3}}$ //

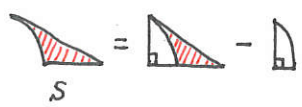
(4) $C : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \left(\Leftrightarrow\ y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)$



∴ 右図より.

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 1 - \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{3} \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\,dx$$

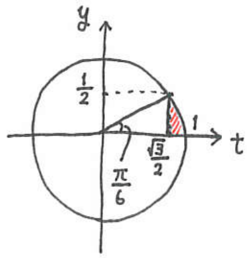
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - 2\int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{3} \sqrt{1 - \frac{1}{9}x^2}\,dx$$



$t = \frac{1}{3}x$ とおいて置換積分する. $dt = \frac{1}{3}dx$, $\begin{array}{c|c} x & \frac{3\sqrt{3}}{2} \to 3 \\ \hline t & \frac{\sqrt{3}}{2} \to 1 \end{array}$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} - 6\underbrace{\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,dt}$$

右図の赤線部分の面積



$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - 6\left(\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - 6\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \underline{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}} \ //$$