2014年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ 原点Oを中心とする半径$2\sqrt{2}$の球面S上に3点A, B, Cがあり,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=5,\quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=6$$

をみたしている. 三角形ABCの重心をGとし, 直線OGと球面Sの交点のうちGから遠い方をPとする.

(1) $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OG}|$の値を求めなさい.
(2) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$を用いて表しなさい.
(3) $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OP}$のなす角を求めなさい.

(1) Aは球面上の点より OAは半径 $\therefore \underline{|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{2}}$ //

$$|\overrightarrow{OG}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right|^2=\frac{1}{9}\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(3\cdot 8+8+10+12)$$

$$=6 \qquad \therefore \underline{|\overrightarrow{OG}|=\sqrt{6}} \text{ //}$$

(2) $|\overrightarrow{OG}|:|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{6}:2\sqrt{2}$ より. $\overrightarrow{OP}=\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\overrightarrow{OG}$

$$=\underline{-\frac{2\sqrt{3}}{9}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})} \text{ //}$$

(3) なす角をθとおくと ($0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$)

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|}\quad\cdots ①$$

ここで $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$$=-4\sqrt{3}$$

①に代入して, $\cos\theta=\frac{-4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \underline{\theta=150^\circ} \text{ //}$$