

2015年看護学部第4問


 数理
石井K

4 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a \neq 0$) および $g(x) = mx$ ($m \neq 0$) について、次の(1), (2)の間に答えなさい。

- (1) 関数 $f(x)$ が、 $x=1$ で極大値4, $x=3$ で極小値0をとるように a, b, c の値を計算しなさい。
 (2) (1)で求めた関数 $f(x)$ と $g(x)$ が3点で交わる時、 $f(x)$ と $g(x)$ は2つの領域を囲むが、これら2つの領域の面積が等しくなるように m の値を計算しなさい。

$$(1) f(1) = 4 \text{ より, } a + b + c = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3) = 0 \text{ より, } 27a + 9b + 3c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

また、 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ で、 $x=1$ で極大値をとるので

$$f'(1) = 0 \text{ より, } 3a + 2b + c = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{同様に, } f'(3) = 0 \text{ より, } 27a + 6b + c = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{4} \text{ より, } 3b + 2c = 0 \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{3} \text{ より, } b + 2c = 12 \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} - \textcircled{6} \text{ より, } 2b = -12 \quad \therefore b = -6 \quad \text{このとき } c = 9, a = 1$$

これらは $\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ をみたす。 $\therefore a = 1, b = -6, c = 9$ //

(2) (1)より、 $f(x) = x(x-3)^2$ グラフは右のようになる。

$f(x) - g(x) = 0$ を解くと、

$$x\{(x-3)^2 - m\} = 0 \text{ より, } x = 0, 3 \pm \sqrt{m} \quad (\text{ただし } m > 0)$$

$$\therefore \text{面積が等しい} \Leftrightarrow \int_0^{3-\sqrt{m}} f(x) - g(x) dx = \int_{3-\sqrt{m}}^{3+\sqrt{m}} g(x) - f(x) dx \quad \text{かつ } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{3+\sqrt{m}} f(x) - g(x) dx = 0 \quad \text{かつ } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{m}{2}x^2 \right]_0^{3+\sqrt{m}} = 0 \quad \text{かつ } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(3+\sqrt{m})^2 \{(3+\sqrt{m})^2 - 8(3+\sqrt{m}) + 18 - 2m\} = 0 \quad \text{かつ } m > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(3+\sqrt{m})^3(\sqrt{m}-1) = 0 \quad \text{かつ } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{m = 1} //$$

