



2014年医学部第1問

1 自然数  $n$  に対して、 $f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}$  とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $f_1(1)$  を求めよ。

(2)  $g(x) = f_1\left(\frac{1}{x}\right)$  とおく。  $g'(x)$  を求め、  $x > 0$  のとき

$$f_1(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x)$  を求めよ。

(4) 部分積分法を用いて、

$$f_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nf_n(x) - 2nf_{n+1}(x)$$

が成り立つことを示せ。

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{2^{n-3} C_{n-1}}{2^{2n-2}} \pi$  ( $n \geq 2$ ) であることを示せ。ただし、 ${}_m C_k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$  とする。