0001850549418999

富山大学

2014年 医学部 第1問　1枚目／2枚.

$\boxed{1}$ 自然数nに対して，$f_n(x)=\int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_1(1)$を求めよ．

(2) $g(x)=f_1\left(\frac{1}{x}\right)$とおく．$g'(x)$を求め，$x>0$のとき

$$f_1(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{x\to\infty} f_1(x)$を求めよ．

(4) 部分積分法を用いて，

$$f_n(x)=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2nf_n(x)-2nf_{n+1}(x)$$

が成り立つことを示せ．

(5) $\lim_{x\to\infty} f_n(x)=\frac{{}_{2n-3}C_{n-1}}{2^{2n-2}}\pi$ $(n \geqq 2)$であることを示せ．ただし，${}_mC_k=\frac{m!}{(m-k)!k!}$とする．

(1) $t=\tan\theta$ とおいて置換積分する．$\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=dt$，

t	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$f_1(1)=\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\pi}{4}}\ //$$

(2) $g'(x)=f_1'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$ より．$\left(f_1'(x)=\frac{1}{x^2+1}\right.$ である$\left.\right)$

$$g'(x)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+1}$$

$\therefore \{f_1(x)+g(x)\}'=f_1'(x)+g'(x)=0$　$\therefore f_1(x)+g(x)=C$　(C:定数)

ここで，$g(1)=f_1(1)\underset{(1)}{=}\frac{\pi}{4}$ より．　$f_1(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$ ■

(3) (2)より．$\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{2}-g(x)$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to\infty}f_1(x)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+0}f_1(x)$$
$$=\frac{\pi}{2}-f_1(0)$$
$$=\underline{\frac{\pi}{2}}\ //$$

2枚目につづく！

0001850549418999

富山大学

2014 年 医学部 第 1 問　2枚目／2枚.

1 自然数 n に対して，$f_n(x)=\int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_1(1)$ を求めよ．

(2) $g(x)=f_1\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく．$g'(x)$ を求め，$x>0$ のとき

$$f_1(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{x\to\infty} f_1(x)$ を求めよ．

(4) 部分積分法を用いて，

$$f_n(x)=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2nf_n(x)-2nf_{n+1}(x)$$

が成り立つことを示せ．

(5) $\lim_{x\to\infty} f_n(x)=\frac{{}_{2n-3}C_{n-1}}{2^{2n-2}}\pi$ $(n\geqq 2)$ であることを示せ．ただし，${}_mC_k=\frac{m!}{(m-k)!k!}$ とする．

(4) $f_n(x)=\int_0^x (t)'\cdot\frac{dt}{(t^2+1)^n}$

$=\left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^x-\int_0^x -n\cdot t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt$

$=\frac{x}{(x^2+1)^n}+n\int_0^x\frac{2(t^2+1)-2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt$

$=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2n\int_0^x\frac{dt}{(t^2+1)^n}-2n\int_0^x\frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$

$=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2nf_n(x)-2nf_{n+1}(x)$ ▨

(5) (4) の式に $n=1$ を代入すると．$f_1(x)=\frac{x}{x^2+1}+2f_1(x)-2nf_2(x)$

$\therefore f_2(x)=\underbrace{\frac{1}{2}f_1(x)}_{\to\frac{\pi}{4}}+\underbrace{\frac{x}{2(x^2+1)}}_{\to 0}$　$\therefore$ (3) より．$f_2(x)=\frac{\pi}{4}$

数学的帰納法で示す．

(i) $n=2$ のとき．$\lim_{x\to\infty} f_2(x)=\frac{{}_1C_1}{2^2}\pi=\frac{\pi}{4}$ となり．成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると．$\lim_{x\to\infty} f_k(x)=\frac{{}_{2k-3}C_{k-1}}{2^{2k-2}}\pi$ …(*)

これを $n=k$ のときの (4) の式に代入すると．$f_{k+1}(x)=\frac{2k-1}{2k}f_k(x)+\underbrace{\frac{x}{2k(x^2+1)^k}}_{x\to\infty \text{ のとき} \to 0}$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f_{k+1}(x)=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{{}_{2k-3}C_{k-1}}{2^{2k-2}}\pi$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f_{k+1}(x)=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{(2k-3)!}{(k-1)!(k-2)!\cdot 2^{2k-2}}\pi\times\boxed{\frac{2k-2}{2k-2}}$ → $(2k-1)!$ を作るためにかける．

$=\frac{(2k-1)!}{2^{2k}k!(k-1)!}\pi$

$=\frac{{}_{2k-1}C_k}{2^{2k}}\pi$　となり $n=k+1$ のときも成り立つ

$\therefore n\geqq 2$ において，$\lim_{x\to\infty} f_n(x)=\frac{{}_{2n-3}C_{n-1}}{2^{2n-2}}\pi$ が成り立つ ▨