

2014年理(数学科)第3問

3  $\triangle ABC$  が与えられているとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 辺  $AB$  上の点  $P$ , 辺  $AC$  上の点  $Q$  が, それぞれ  $AP:PB = s:1-s$ ,  $AQ:QC = t:1-t$  と辺  $AB$ ,  $AC$  を内分するように与えられているとする (即ち  $0 < s < 1$ ,  $0 < t < 1$  とする)。直線  $PQ$  が  $\triangle ABC$  の重心を通るための必要十分条件は  $3st = s + t$  であることを示せ。
- (2) 直線  $l$  を  $\triangle ABC$  の重心を通る直線とする。  $l$  によって,  $\triangle ABC$  はふたつの図形 (三角形と四角形, またはふたつの三角形) に分割される。これらの図形の面積のうち, 大きい方を  $S_1$ , 小さい方を  $S_2$  とする。ただし, 面積が等しい場合も同じ記号を用い,  $S_1 = S_2$  とする。
- (i)  $l$  が  $\triangle ABC$  のいずれかの頂点を通ることは  $S_1 = S_2$  となるための必要十分条件であることを示せ。
- (ii)  $\frac{S_1}{S_2}$  の最大値と最小値を求めよ。