2014 年 理（数学科） 第 3 問

3 △ABC が与えられているとする．以下の問いに答えよ．

(1) 辺 AB 上の点 P，辺 AC 上の点 Q が，それぞれ AP : PB $= s : 1-s$，AQ : QC $= t : 1-t$ と辺 AB，AC を内分するように与えられているとする（即ち $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ とする）．直線 PQ が △ABC の重心を通るための必要十分条件は $3st = s + t$ であることを示せ．

(2) 直線 ℓ を △ABC の重心を通る直線とする．ℓ によって，△ABC はふたつの図形（三角形と四角形，またはふたつの三角形）に分割される．これらの図形の面積のうち，大きい方を S_1，小さい方を S_2 とする．ただし，面積が等しい場合も同じ記号を用い，$S_1 = S_2$ とする．

（ i ）ℓ が △ABC のいずれかの頂点を通ることは $S_1 = S_2$ となるための必要十分条件であることを示せ．

（ii）$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値と最小値を求めよ．