

2013年 数学科・物理学科（共通問題） 第9問

9 放物線 $y = x^2$ を C_1 , C_1 と異なる放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) を C_2 とする.

(1) $a = 1$ のとき, C_1 と C_2 の両方に接する直線は最大でも 1 本しか存在しないことを示せ.

(2) $a = 1$ のとき, 条件 $b \neq 0$ は条件

C_1 と C_2 の両方に接する直線が 1 本だけ存在する

の必要十分条件であることを示せ.

(3) 条件 p_1, p_2, q_1, q_2 を次で定める.

p_1 : C_2 は下に凸である.

p_2 : C_2 は上に凸である.

q_1 : C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わる. q_2 : C_1 と C_2 が交わらない.

$a \neq 1$ のとき, 条件

p : 「 p_1 かつ q_1 」 または 「 p_2 かつ q_2 」

は条件

q : C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在する

の必要十分条件であることを示せ.