

2012年理工（情報科・工業化・機械工・土木工）第2問

2  $r$  を  $0 < r < 1$  を満たす実数として、次のように行列とベクトルを定める。

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 2r-1 & 1-r \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

またベクトル  $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = Q, \quad Q_n = AQ_{n-1} + P \quad (n \geq 2)$$

として定める。

- (1)  $AP = \alpha P$ ,  $AQ = \beta Q$  を満たす定数  $\alpha$ ,  $\beta$  を求めよ。
- (2)  $A^n P$ ,  $A^n Q$  を求めよ。
- (3)  $Q_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  を求めよ。
- (4) 座標平面において、各  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し座標が  $(a_n, 0)$  である点を  $X_n$ , 座標が  $(a_n, b_n - a_n)$  である点を  $Y_n$  とする。さらに、台形  $X_n X_{n+1} Y_{n+1} Y_n$  の面積を  $S_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とし、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$

とする。

- (i)  $S$  を求めよ。
- (ii)  $r$  が  $0 < r < 1$  の範囲を動くとき、 $S$  の最大値とそのときの  $r$  の値を求めよ。