

2014年 畜産学部 第1問



1 2次方程式  $x^2 - x - 1 = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) とし,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n \\ \beta^n \end{pmatrix}$$

によって数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を定義する。ただし,  $n$  は自然数である。次の各問に答えなさい。

- (1) 次の各問に答えなさい。 (1)(i)  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- (i)  $\alpha, \beta$  の値を求めなさい。
- (ii)  $a_1, a_2, a_3$  の値を求めなさい。 (ii)  $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha - \beta) = 1, a_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^2 - \beta^2) = 1, a_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^3 - \beta^3) = 2$
- (iii)  $b_1, b_2, b_3$  の値を求めなさい。 (iii)  $b_1 = \alpha + \beta = 1, b_2 = \alpha^2 + \beta^2 = 3, b_3 = \alpha^3 + \beta^3 = 4$
- (2) ベクトル  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  をそれぞれ  $\vec{p} = (a_1, b_1), \vec{q} = (a_2, b_2), \vec{r} = (a_3, b_3)$  と定義する。
- (i)  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  の大きさ  $|\vec{p}|, |\vec{q}|, |\vec{r}|$  を求めなさい。 (2)(i)  $|\vec{p}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{2}$
- (ii)  $\vec{p}$  と  $\vec{q}$  のなす角  $\theta$  について,  $\cos \theta, \sin \theta, \tan \theta$  を求めなさい。  $|\vec{q}| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{10}$
- (iii)  $\vec{q}$  と  $\vec{r}$  のなす角  $\theta$  について,  $\cos 2\theta, \sin 2\theta, \tan 2\theta$  を求めなさい。  $|\vec{r}| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 2\sqrt{5}$
- (3) 自然数  $n$  について,  $a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} \geq b_n$  がそれぞれ成り立つ。
- (i)  $\log_{10} a_n \leq \frac{1}{3}$  を満たす  $n$  をすべて求めなさい。 (ii)  $\cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{2} \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- (ii)  $\log_{10} b_n \leq \frac{1}{3}$  を満たす  $n$  をすべて求めなさい。  $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- (iii)  $\log_{10}(a_n b_n) \leq 1$  を満たす  $n$  をすべて求めなさい。  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$
- (3) (i).  $a_n \leq 10^{\frac{1}{3}} \therefore a_n^3 \leq 10$  (iii)  $\cos \theta = \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{|\vec{q}| |\vec{r}|} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$
- $a_4 = 3, a_3 = 2$  なので,  $n = 1, 2, 3$
- (ii)  $b_n \leq 10^{\frac{1}{3}} \therefore b_n^3 \leq 10$   $\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{24}{25}$
- $b_2 = 3, b_1 = 1$  より,  $n = 1$
- (iii)  $a_n b_n \leq 10$   $\therefore \sin 2\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$
- $b_4 = 7$  より,  $a_4 b_4 = 21 > 10$
- $a_3 b_3 = 8 \leq 10$   $\tan 2\theta = \frac{7}{24}$
- $\therefore n = 1, 2, 3$