2013年 第3問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

3 下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $x\cos x = \sin x$ は $\dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ の範囲にただ1つの解をもつことを示せ．

(2) (1)の解を α とおくとき，$0 < x < 2\pi$ において不等式

$$\frac{\sin x}{x} \geqq -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$$

が成り立つことを示せ．

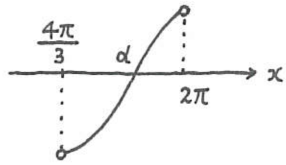
(1) $f(x) = x\cos x - \sin x$ とおくと，

$f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x$

$= -x\sin x$

$\therefore$ $\dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ において $\sin x < 0$ より $f'(x) > 0$

$\therefore$ $f(x)$ は $\dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ において単調増加で



$f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{4\pi}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0,$

$f(2\pi) = 2\pi > 0$

であるから $\dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ において，ただ1つの解をもつ ▨

(2) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とおくと，

$g'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(i) $0 < x \leqq \pi$ において

$\dfrac{\sin x}{x} \geqq 0$，$-\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} < 0$ より，$\dfrac{\sin x}{x} \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ が成り立つ

x	π	$\cdots$	α	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

(ii) $\pi < x < 2\pi$ において

$f'(x) > 0$ より $f(x)$ は単調増加 $\therefore$ 右の増減表より

$g(x) \geqq g(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\alpha$ $\left(\because (1)より，\alpha\cos\alpha = \sin\alpha であるから\right)$

ここで，$\alpha = \tan\alpha$ より $-\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}} = \cos\alpha$ $(\because \cos\alpha < 0)$

よって，$g(x) \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

(i)，(ii) より，$0 < x < 2\pi$ において，$\dfrac{\sin x}{x} \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

2013年 第3問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

3 下の問いに答えよ.

(1) 方程式 $x\cos x = \sin x$ は $\frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ の範囲にただ1つの解をもつことを示せ.

(2) (1)の解を α とおくとき, $0 < x < 2\pi$ において不等式

$$\frac{\sin x}{x} \geqq -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$$

が成り立つことを示せ.

(2)のつづき

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}$$

ここで $\frac{4\pi}{3} < \alpha < 2\pi$ より, $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} < \frac{3}{4\pi}$

$$\therefore -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$$

以上のことより, $0 < x < 2\pi$ において

$$\frac{\sin x}{x} \geqq -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$$ ▨