0001887632118999

昭和大学

2014年 医学部 第1問　　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) (1-1) 連立不等式 $600 < 2^{x+2} - 2^x < 900$ を満たす自然数 x を求めよ.

(1-2) 連立不等式 $21 < \log_2 x^6 < 22$ を満たす自然数 x を求めよ.

(2) (2-1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, 方程式 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = a$ が相異なる2つの解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

(2-2) 2次方程式 $\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$ の2つの解を $\tan\alpha$, $\tan\beta$ とするとき, $\alpha + \beta$ の値を求めよ. ただし, $0 < \alpha + \beta < \pi$ とする.

(3) 三角形OABにおいて OA $= 1$, OB $= 2$, $\angle$AOB $= 120^\circ$ とし, 点Oから辺ABに下ろした垂線の足をH, 辺OBの中点をM, 線分OHと線分AMの交点をCとする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(3-1) AH : HB を求めよ.

(3-2) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

(1) (1-1) $600 < 2^2 \cdot 2^x - 2^x < 900 \iff 600 < 3 \cdot 2^x < 900$

$\iff 200 < 2^x < 300$

$\therefore 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512$ より. $\underline{x = 8}$

(1-2) $2^{21} < x^6 < 2^{22}$ $\therefore 2^{\frac{21}{6}} < x < 2^{\frac{22}{6}} \iff 8\sqrt{2} < x < 8 \cdot 2^{\frac{2}{3}}$

$\iff 1024\sqrt{2} < x^3 < 2048$

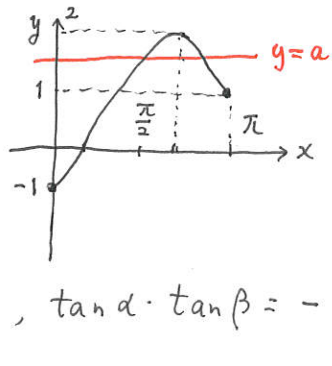
$\Rightarrow 1447 < x^3 < 2048$

$11^3 = 1331,\ 12^3 = 1728,\ 13^3 = 2197$ より $\underline{x = 12}$

(2) (2-1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \underline{1 \leqq a < 2}$



(2-2) 解と係数の関係より. $\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\tan\alpha \cdot \tan\beta = -1$

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0 < \alpha + \beta < \pi$ より $\underline{\alpha + \beta = \frac{5\pi}{6}}$

昭和大学

2014年 医学部 第1問

数理
石井K

2枚目／2枚

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) (1-1) 連立不等式 $600 < 2^{x+2} - 2^x < 900$ を満たす自然数 x を求めよ．

(1-2) 連立不等式 $21 < \log_2 x^6 < 22$ を満たす自然数 x を求めよ．

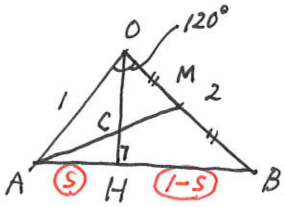
(2) (2-1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = a$ が相異なる2つの解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2-2) 2次方程式 $\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$ の2つの解を $\tan\alpha$，$\tan\beta$ とするとき，$\alpha + \beta$ の値を求めよ．ただし，$0 < \alpha + \beta < \pi$ とする．

(3) 三角形OABにおいて $\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB} = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = 120°$ とし，点Oから辺ABに下ろした垂線の足をH，辺OBの中点をM，線分OHと線分AMの交点をCとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(3-1) AH : HB を求めよ．

(3-2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．



(3) (3-1) $\overrightarrow{OH} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$ と表すと．

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2\cdot\cos 120° = -1$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a})$$
$$= (s-1) + s\cdot 2^2 + (1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$= 7s - 2$$

$\therefore\ \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ より．$s = \frac{2}{7}$ $\quad\therefore\ \underline{AH : HB = 2 : 5}$ //

(3-2) O，C，H は一直線上にあるので，

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OH} = \frac{5}{7}k\vec{a} + \frac{2}{7}k\vec{b} \quad \cdots①$$

また，$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

A，C，M は一直線上にあるので，$\overrightarrow{AC} = l\cdot\overrightarrow{AM} = -l\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}$

このとき．$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = (1-l)\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b} \quad \cdots②$

①，②より．$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから（一次独立）．

$$\frac{5}{7}k = 1 - l, \quad \frac{2}{7}k = \frac{l}{2} \qquad \therefore\ k = \frac{7}{9}$$

$$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OC} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}}\ //$$