0002143636587999

昭和大学

2015年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 正の整数 a, b の組 $(a,\ b)$ の全体を

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ \cdots$

のように1列に並べる．ここで，2つの組 $(a_i,\ b_i)$ $(i=1,\ 2)$ について，$a_1+b_1<a_2+b_2$ ならば $(a_1,\ b_1)$ の方を先に並べ，また，$a_1+b_1=a_2+b_2$ ならば，$a_1<a_2$ のとき $(a_1,\ b_1)$ の方を先に並べるものとする．次の各問に答えよ．なお，必要ならば公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

を使ってよい．

(1) 組 $(5,\ 5)$ は初めから何番目にあるか．

(2) m, n を正の整数とする．組 $(m,\ n)$ は初めから何番目にあるか．

(3) 初めから200番目にある組を求めよ．

(4) 初めから n 番目の組が $(a,\ b)$ であるとき，$c_n=ab$ とおく．和 $c_1+\cdots+c_{200}$ を求めよ．

(1) (a,b) に対して，

$a+b=2$ となるものは1個，$a+b=3$ となるものは2個，…，$a+b=k$ となるものは $(k-1)$ 個ある．

また (a,b) に対して，$a+b=10$ となるものは順に $(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),\cdots$ であるから，

$\left(\sum_{k=1}^{8} k\right)+5=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+5=41$　∴ $\underline{41番目}$ //

(2) (1)と同様に考えて，$(m,n)\neq(1,1)$ のときは，

$\left(\sum_{k=1}^{m+n-2} k\right)+m=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m$

これは，$(m,n)=(1,1)$ のときも成り立つ　∴ $\underline{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m\ 番目}$ //

(3) $a+b\leqq k$ となるものの個数は，

$\sum_{i=1}^{k-1} i=\frac{1}{2}(k-1)k$　よって，$\frac{1}{2}k(k-1)\leqq 200$ となる最大の k は，$k=20$　このとき，$\frac{1}{2}k(k-1)=190$

∴ 200番目は，$a+b=21$ となるものの中の10番目　∴ $\underline{(10,11)}$ //

(4) $\sum_{j=2}^{20}\left\{\sum_{i=1}^{j-1} i(j-i)\right\}+1\cdot 20+2\cdot 19+\cdots+10\cdot 11$

$=\sum_{j=2}^{20}\left\{\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right)-\sum_{i=1}^{j-1} i^2\right\}+\sum_{i=1}^{10} i(21-i)$

$=\sum_{j=2}^{20}\left\{\frac{1}{2}j^2(j-1)-\frac{1}{6}(j-1)j(2j-1)\right\}+21\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11-\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21$

$=\frac{1}{6}\sum_{j=2}^{20}(j^3-j)+770$　(上へつづく)

(4)のつづき．

$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\cdot 20^2\cdot 21^2-\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21\right)+770$

$=7350-35+770$

$=\underline{8085}$ //