



2014年教育・農・理(生物, 地球) 第3問

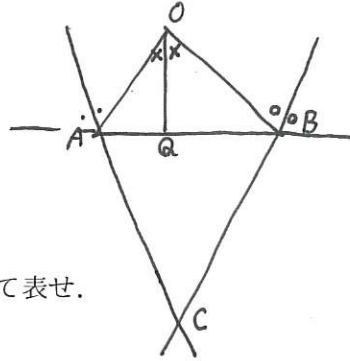
3 三角形 OAB において, 頂点 A, B におけるそれぞれの外角の二等分線の交点を C とする.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 点 P が  $\angle AOB$  の二等分線上にあるとき,

$$\vec{OP} = t \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

となる実数  $t$  が存在することを示せ.

(2)  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$  のとき,  $\vec{OC}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ.



(1)  $\angle AOB$  と直線 AB との交点を Q とおくと.

AQ : QB = OA : OB より.

$$\vec{OQ} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \vec{b} \quad \text{と表す.}$$

$$\therefore \vec{OP} = k \vec{OQ} \quad (k \text{ は実数}) \text{ より. } \vec{OP} = \frac{k}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} (|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b})$$

$$\therefore \text{ここで, } t = \frac{k|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \text{ とおくと. } \vec{OP} = t \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \quad \square$$

(2) 右上の図と(1)より.

$$\vec{AC} = u \left( \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{AO}}{|\vec{AO}|} \right) = u \left( \frac{\vec{a} - \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right)$$

$$\therefore \text{ここで, } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 49 - 10 + 25 = 64 \text{ より}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 8$$

$$\therefore \vec{AC} = u \left( \frac{1}{8} \vec{a} - \frac{1}{8} \vec{b} - \frac{1}{7} \vec{a} \right) = -\frac{1}{56} u \vec{a} - \frac{1}{8} u \vec{b}$$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \left( 1 - \frac{1}{56} u \right) \vec{a} - \frac{1}{8} u \vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様にして, } \vec{BC} = v \left( \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{BO}}{|\vec{BO}|} \right) = v \left( \frac{\vec{b} - \vec{a}}{8} - \frac{\vec{b}}{5} \right) = -\frac{1}{8} v \vec{a} - \frac{3}{40} v \vec{b}$$

$$\therefore \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = -\frac{1}{8} v \vec{a} + \left( 1 - \frac{3}{40} v \right) \vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が一次独立より, ①と②の係数を比較して.  $v = -10$ ,  $u = -14$

$$\therefore \vec{OC} = \frac{5}{4} \vec{a} + \frac{7}{4} \vec{b} \quad //$$