大阪府立大学

2014 年 第 5 問

数理 石井K

5 定数 c は $1 < c < \sqrt{2}$ をみたすとし，$0 \leqq x < 1$ で定義された 2 つの関数

$$f(x) = x + \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = cf(x) - x\sqrt{1-x^2}$$

を考える．$g(x)$ の導関数を $g'(x)$ と表す．

(1) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，それらを与える x の値も求めよ．

(2) $g'(x) = h(x)(c - f(x))$ をみたす関数 $h(x)$ を求めよ．

(3) $g(x)$ の最大値を求めよ．ただし，最大値を与える x の値を求める必要はない．

(1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$\sqrt{1-x^2} = x$ すなわち $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	(1)

$\therefore$ $f(x)$ の最大値は $\sqrt{2}$ ($x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき)，最小値は 1 ($x = 0$ のとき) //

(2) $g'(x) = cf'(x) - \sqrt{1-x^2} - x\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{c\sqrt{1-x^2} - cx}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{c(\sqrt{1-x^2}-x) - (\sqrt{1-x^2}-x)(\sqrt{1-x^2}+x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{(\sqrt{1-x^2}-x)(c-\sqrt{1-x^2}-x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{(\sqrt{1-x^2}-x)(c-f(x))}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore$ $(c-f(x))\left\{h(x) - \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}\right\} = 0$

$f(x) = c$ となる x を α, β $(\alpha < \beta)$ とおくと，

(問題文に $f(x)$: 連続と書かれていないので，一応場合を分けた)

$$h(x) = \begin{cases} \text{任意の実数} & (x = \alpha, \beta \text{ のとき}) \\ \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & (x \neq \alpha, \beta) \end{cases}$$ //

(3) $g'(x) = 0$ となるのは，(1) より，$f(x) = c$ となる x が 2つ 存在するので ($1 < c < \sqrt{2}$ より)

その x を α, β と表すと，$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha, \beta$ $\left(\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} < \beta \text{ とする}\right)$

$g(\alpha) = cf(\alpha) - \alpha\sqrt{1-\alpha^2}$

ここで，$f(\alpha) = c$ より，$\alpha + \sqrt{1-\alpha^2} = c$ $\therefore$ $\alpha = \frac{c - \sqrt{2-c^2}}{2}$

$\therefore$ $g(\alpha) = c^2 - \frac{c-\sqrt{2-c^2}}{2}\cdot\frac{c+\sqrt{2-c^2}}{2} = \frac{c^2+1}{2}$ $g(\beta)$ も同様 $\therefore$ $\frac{c^2+1}{2}$ //

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	β	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$g(x)$	c	↗		↘		↗		↘	(c)