2014年 第4問

数理
石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) a を $a \geqq 0$ となる実数とし，$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ とする．このとき，定積分 $\int_0^a x^2e^{-x^2}\,dx$ を a，$I(a)$ を用いて表せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$，x 軸，y 軸および直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x) = (-8x)\cdot e^{-x^2} + (-4x^2+2)\cdot(-2x\cdot e^{-x^2})$

$= 8x\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{-x^2}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗	2	↘		↗
		$-4e^{-\frac{3}{2}}$ 極小		極大		$-4e^{-\frac{3}{2}}$ 極小	

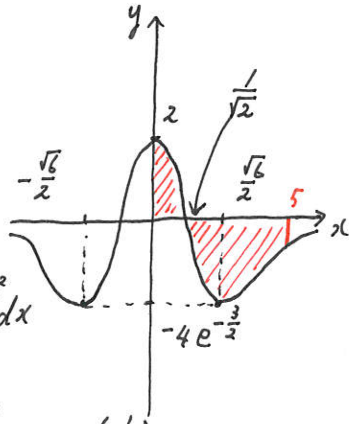
$\therefore$ 極大値 2 $(x=0$ のとき$)$

極小値 $-4e^{-\frac{3}{2}}$ $\left(x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right.$ のとき$\left.\right)$ //

(2) $\int_0^a -\frac{x}{2}\left(e^{-x^2}\right)'dx = \left[-\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_0^a - \int_0^a -\frac{1}{2}e^{-x^2}dx$

$= -\frac{a}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}I(a)$ //

(3)



$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x^2+2)e^{-x^2}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^5 -(-4x^2+2)e^{-x^2}dx$

$= \int_0^5 (4x^2-2)e^{-x^2}dx + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x^2+2)e^{-x^2}dx$

$= 4\int_0^5 x^2e^{-x^2}dx - 2\int_0^5 e^{-x^2}dx - 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^2e^{-x^2}dx + 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx$

$= 4\left\{-\frac{5}{2}e^{-25}+\frac{1}{2}I(5)\right\} - 2I(5) - 8\left\{-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} + 4I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -10e^{-25} + 2I(5) - 2I(5) + 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - 4I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - 10e^{-25}$ //