

2016年 医学部 第5問

5  $xy$  平面上的放物線  $y = x^2$  の  $0 \leq x \leq 1$  に対応する部分の長さを  $L$  とする.  $L$  の値を次のようにして求めよう.  $L$  は定積分

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \boxed{\text{ア}}} x^2 dx$$

で定まる. この定積分を計算するために  $x = \frac{e^t - e^{-t}}{4}$  として, 置換積分を行う. このとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{4}$$

であり

$$\sqrt{1 + \boxed{\text{ア}}} x^2 = \frac{e^t + e^{-t}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である.

また,  $\frac{e^t - e^{-t}}{4} = 1$  となる  $t$  の値を  $\alpha$  とすると,  $x$  が  $0 \rightarrow 1$  と変化するとき,  $t$  は  $\boxed{\text{ウ}} \rightarrow \alpha$  と変化するので,  $L$  を定める定積分は

$$L = \frac{1}{\boxed{\text{エ}}} \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\alpha} (e^t + e^{-t}) \boxed{\text{オ}} dt$$

となる. ここで  $X = e^\alpha$  とおくと,  $X$  は2次方程式

$$X^2 - \boxed{\text{カ}} X - \boxed{\text{キ}} = 0$$

の解である.  $X > 0$  なので

$$X = \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である. これを用いて  $\alpha$  の値を定め,  $L$  の値を計算すると

$$L = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} + \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \log(\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セ}}})$$

である.