早稲田大学

2015年 政治経済学部 第2問

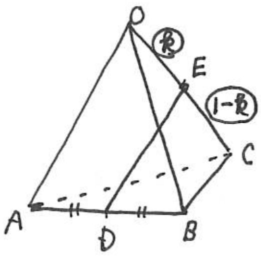
$\boxed{2}$ 空間内に，一辺の長さ1の正四面体OABCがある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 辺ABの中点をDとし，また，辺OCを $k:(1-k)$ に内分する点をEとする．ただし，$0<k<1$ とする．このとき，$\overrightarrow{DE}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{DE}$ の大きさ $|\overrightarrow{DE}|$ を k を用いて表せ．

(3) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$ を k を用いて表せ．

(4) $\triangle$EABの面積 S を k を用いて表せ．さらに，面積 S を最小にする k の値とそのときの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OE}=k\vec{c}$ より．

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\underline{-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+k\vec{c}}\ /\!/$$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ より

$$|\overrightarrow{DE}|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+k^2|\vec{c}|^2-k\vec{c}\cdot\vec{a}-k\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=k^2+\frac{3}{4}-k$$

$$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{k^2-k+\frac{3}{4}}}\ /\!/$$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+k\vec{c})$

$$=-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+k\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-k\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\underline{0}\ /\!/$$

(4) $\triangle EAB=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{DE}|$　($\because$ (3)より)

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{k^2-k+\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ \underline{S=\frac{1}{2}\sqrt{k^2-k+\frac{3}{4}}}\ /\!/$$

また，$S=\frac{1}{2}\sqrt{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$ より．Sの$\underline{最小値は\ \frac{\sqrt{2}}{4}\ (k=\frac{1}{2}のとき)}$ $/\!/$