2013年 文系 第2問

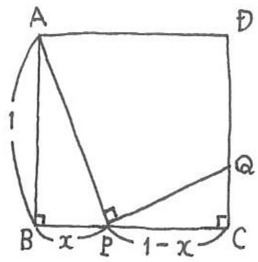


$\boxed{2}$ 一辺の長さが1の正方形ABCDを考える．点Pは，点B，Cを除いた辺BC上を動くとする．点Pを通り直線APと垂直な直線と辺CDとの交点をQとする．線分BPの長さを $x$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) △CPQの面積 $S$ を，$x$ を用いて表せ．

(2) 面積 $S$ の最大値と，そのときの $x$ の値を求めよ．

(3) 線分AQの長さ $L$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ．




(1) $\angle APB = 90^\circ - \angle QPC$

$\angle PQC = 90^\circ - \angle QPC$

$\therefore \angle APB = \angle PQC$

∴ 2つの内角がそれぞれ等しいので，$\triangle APB \backsim \triangle PQC$

$\therefore 1 : x = 1-x : QC \qquad \therefore QC = x(1-x)$

$\underline{S = \frac{1}{2}x(1-x)^2}$ //

(2) $S(x) = \frac{1}{2}x(1-x)^2$ とおくと，$S(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x$

$\therefore S'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$

$0 < x < 1$ より増減表は右のようになる．

| $x$ | (0) | … | $\frac{1}{3}$ | … | (1) |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $S(x)$ | | ↗ | $\frac{2}{27}$ | ↘ | |

∴ $\underline{最大値\ \frac{2}{27}\ (x = \frac{1}{3} のとき)}$ //

(3) $AD = 1$，$DQ = 1 - x(1-x)$ より，

$\therefore L^2 = 1^2 + (x^2 - x + 1)^2$

$= 1 + \left\{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right\}^2$

∴ $L^2$ の最小値は $\frac{25}{16}$ $(x = \frac{1}{2}$ のとき$)$

← $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$ として計算すると大変なので $AQ^2 = AD^2 + DQ^2$ を使って計算した．

∴ $\underline{L の最小値は\ \frac{5}{4}\ (x = \frac{1}{2} のとき)}$ //