新潟大学

2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i) および (ii) をみたすように定める.

(i) $a_1 = 0$, $a_2 = 3$

(ii) 3以上の自然数 n に対して, 第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり, 第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である.

次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第3項から第10項までの各項の値を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第50項の値を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第50項までの和を求めよ.

(1) $a_3 = a_2 - 1 = 2$, $a_4 = a_3 - 1 = 1$, $a_5 = a_4 - 1 = 0$ //

$a_6 = a_5 + 6 = 6$, $a_7 = a_6 - 1 = 5$, $a_8 = a_7 - 1 = 4$ //

$a_9 = a_8 - 1 = 3$, $a_{10} = a_9 + 6 = 9$ //

(2) a_{11} 以降も求めると, $a_{11} = 8$, $a_{12} = 7$, $a_{13} = 6$, $a_{14} = 12$, $a_{15} = 11$, $a_{16} = 10$

$a_{17} = 9$, $a_{18} = 15$, $a_{19} = 14$, $a_{20} = 13$, $a_{21} = 12$, $a_{22} = 18$, $a_{23} = 17$, $a_{24} = 16$

となり, $a_{4k+2} = 3(k+1)$, $a_{4k+3} = 3k+2$, $a_{4k+4} = 3k+1$, $a_{4k+5} = 3k$ $(k \geqq 0)$

となることが分かる $\therefore$ $a_{50} = a_{4\cdot 12+2} = 3\cdot 13 = 39$ //

(3) 求める和を S_{50} とおくと,

$a_2 + a_3 + \cdots + a_{49}$

$$S_{50} = \left\{\sum_{k=0}^{11}(a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4} + a_{4k+5})\right\} + a_1 + a_{50}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{11} 12k + 6\right) + 0 + 39$$

計算しやすくするため k を1ずらした

$$= \left(\sum_{k=1}^{12} 12k - 6\right) + 39$$

$$= 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13 - 6\cdot 12 + 39$$

$= 903$ //