新潟大学

2015 年 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ．

(2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ．

(3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ．

(1) 実際に割り算を実行すると，

$$\begin{array}{r} x^2+(1-a)x+1 \\ x-1 \,\big)\overline{\, x^3-ax^2+ax-1} \\ x^3-x^2 \\ \hline (1-a)x^2+ax-1 \\ (1-a)x^2+ax-x \\ \hline x-1 \\ x-1 \\ \hline 0 \end{array}$$

よって，商は $\underline{x^2+(1-a)x+1}$ //

(2) (1) より $P(x)=0$ は次のように表される

$(x-1)\{\underbrace{x^2+(1-a)x+1}_{\text{虚数解をもつ.}}\}=0$

∴ (中かっこの中身) $=0$ の判別式を D とおくと，

$D=(1-a)^2-4<0$ ∴ $(a-1)^2<4$ ∴ $-2<a-1<2$ より

$-1<a<3$ a: 整数 より，$\underline{a=0, 1, 2}$ //

(3) $x^2+(1-a)x+1=0$ が整数の解のみをもてばよいので

解を α, β とおく 解と係数の関係より $\alpha\beta=1$

α, β: 整数 より，$(\alpha, \beta)=(1, 1)$ または $(-1, -1)$

∴ $\alpha+\beta=a-1$ ∴ $a-1=2, -2$ ∴ $\underline{a=3, -1}$ //