自治医科大学

2015年 医学部 第12問

$\boxed{12}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+4$ を満たしている．$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$ の値を求めよ．

$$a_{n+1}-6=\frac{1}{3}(a_n-6)$$

∴ 数列 $\{a_n-6\}$ は 初項 $a_1-6=-5$，公比 $\frac{1}{3}$ の 等比数列 となる

$$\therefore\ a_n-6=-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=6-5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{6-5\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=6n-5\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=6n-\frac{15}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{6-\frac{15}{2n}+\frac{5}{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\underline{6}\,/\!/$$