2012年 理系 第5問

5 次の問いに答えよ.

(1) 実数 $x \geqq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x)\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.