

2016年 第3問

3 a を正の実数とし, x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-ax} \tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\right)$$

で定める. ただし, e は自然対数の底とする. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ が成り立つとき, a の値を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ かつ $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ を満たす x がちょうど 3 個存在するように, 定数 a の値の範囲を定めよ.

(3) a の値が (2) で定めた範囲にあるとする. このとき, 方程式 $f'(x) = 0$ の解を x_1, x_2, x_3 ($-\frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < x_3 < \frac{\pi}{3}$) とし,

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad y_3 = f(x_3)$$

とおく.

(i) y_1, y_2, y_3 を大きさの順に並べよ.

(ii) $\tan x_3$ を a の式で表せ.