0000443726559999

琉球大学

2012年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>1)$ での接線と y 軸との交点を Q とする．次の問に答えよ．

(1) 点 Q の座標を b で表せ．

(2) PQ^2 の最小値を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \dfrac{2x}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

∴ 接線は，$y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}(x-a)+b$ 　　∴ $y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}x - \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-1}} + b$

ここで P は曲線上の点より，$b=\sqrt{a^2-1}$ 　∴ $a^2=b^2+1$

∴ Q の y 座標は，$-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}+b = -\dfrac{b^2+1}{b}+b = -\dfrac{1}{b}$ 　　∴ $\underline{\mathrm{Q}\left(0,-\frac{1}{b}\right)}$ //

(2) $\mathrm{PQ}^2 = (a-0)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2$

$= b^2+1+b^2+2+\dfrac{1}{b^2}$

$= 3+2b^2+\dfrac{1}{b^2}$

ここで，$2b^2>0$，$\dfrac{1}{b^2}>0$ より，相加・相乗平均の関係から

$2b^2+\dfrac{1}{b^2} \geqq 2\sqrt{2b^2\cdot\dfrac{1}{b^2}}$

$= 2\sqrt{2}$ 　$\left(\begin{array}{l}\text{等号成立は } 2b^2=\dfrac{1}{b^2} \\ \text{すなわち，} b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ のとき}\end{array}\right)$

∴ $\mathrm{PQ}^2 \geqq 3+2\sqrt{2}$

∴ 最小値は $\underline{3+2\sqrt{2}}$ //