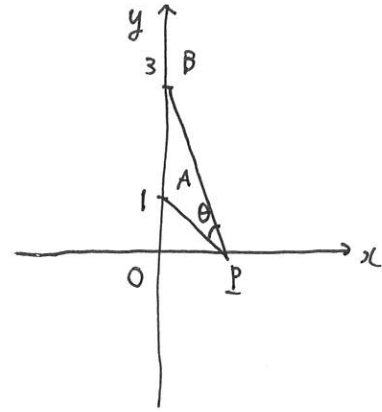


2014年 理学部 第3問

3 座標平面上に2点 $A(0, 1)$, $B(0, 3)$ がある。正の実数 t に対して点 $P(t, 0)$ をとり、 $\angle BPA = \theta$ とおく。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) $\tan \theta$ を t で表せ。
 (2) θ の最大値と、そのときの t の値を求めよ。



$$(1) \tan \angle OPB = \frac{OB}{OP} = \frac{3}{t}$$

$$\tan \angle OPA = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{t}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\angle OPB - \angle OPA)$$

$$= \frac{\frac{3}{t} - \frac{1}{t}}{1 + \frac{3}{t} \cdot \frac{1}{t}}$$

$$= \frac{2t}{t^2 + 3}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より
 (2) θ : 最大 $\Leftrightarrow \tan \theta$: 最大 $\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta}$: 最小

$$\therefore (1) \text{より} \quad \frac{1}{\tan \theta} = \frac{t^2 + 3}{2t}$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{3}{2t}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{3}{2t}}$$

$$= \sqrt{3}$$

$t > 0$ であるから

(相平均・相乗平均の関係)

$$\therefore \frac{1}{\tan \theta} \text{ の最小値は } \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \theta \text{ の最大値は } \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \theta \text{ の最大値は } \frac{\pi}{6}$$

また、等号成立は、 $\frac{t}{2} = \frac{3}{2t}$ あるいは、 $t = \sqrt{3}$ のとき