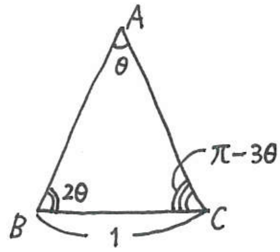
京都大学

2014年 理系 第3問

$\boxed{3}$ △ABCは，条件 ∠B＝2∠A，BC＝1を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，cos∠Bを求めよ．



$\angle A = \theta$，$\angle B = 2\theta$ とおく．

正弦定理より，$\dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{AC}{\sin 2\theta}$

$\therefore AC = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$

∴ △ABCの面積を $S(\theta)$ とおくと，

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cos\theta\cdot\sin(\pi - 3\theta)$

$= \sin 3\theta\cos\theta$ ．

和・積の公式 $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$ より

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}(\sin 4\theta + \sin 2\theta)$

$\therefore S'(\theta) = 2\cos 4\theta + \cos 2\theta$

$= 4\cos^2 2\theta + \cos 2\theta - 2$

ここで，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ より $0 < 2\theta < \dfrac{2}{3}\pi$ $\therefore -\dfrac{1}{2} < \cos 2\theta < 1$

$\therefore S'(\theta) = 0$ となるのは，$\cos 2\theta = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ のとき．この値を α とおくと

2θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{2}{3}\pi\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	

右の増減表より

$S(\theta)$ が最大となるとき，$\underline{\cos\angle B = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}}$ //