熊本大学

2016年 医学部（医学科） 第4問

$\boxed{4}$ a，bを実数とし，曲線$C : y = x^3 - 3ax^2 + bx$を考える．Cの接線の傾きの最小値が-3であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) bをaを用いて表せ．

(2) Cがx軸の正の部分，負の部分とそれぞれ1点で交わるとする．このときaの値の範囲を求めよ．

(3) aが(2)で求めた範囲にあるとき，Cとx軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときのaの値を求めよ．

(1) $y' = 3x^2 - 6ax + b$

$= 3(x-a)^2 - 3a^2 + b$

∴ 接線の傾きの最小値が-3であることより，$-3a^2 + b = -3$　　∴ $\underline{b = 3a^2 - 3}$ //

(2) (1)より，$y = x(x^2 - 3ax + 3a^2 - 3)$

これは原点を通るので，$f(x) = x^2 - 3ax + 3a^2 - 3$ とおくと，

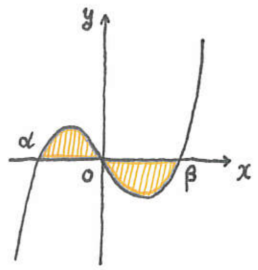
Cがx軸の正の部分，負の部分とそれぞれ1点で交わる $\Longleftrightarrow$ $f(x) = 0$が正の解，負の解をそれぞれ1つもつ

$\Longleftrightarrow f(0) < 0$

$\Longleftrightarrow 3a^2 - 3 < 0$

$\Longleftrightarrow \underline{-1 < a < 1}$ //

(3) (2)の$f(x) = 0$の解をα，β $(\alpha < \beta)$とおくと，



$$S = \int_\alpha^0 x^3 - 3ax^2 + bx \, dx + \int_0^\beta -x^3 + 3ax^2 - bx \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]_\alpha^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + ax^3 - \frac{1}{2}bx^2\right]_0^\beta$$

$$= -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + a(\alpha^3 + \beta^3) - \frac{1}{2}b(\alpha^2 + \beta^2) \quad \cdots ①$$

ここで，解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 3a$，$\alpha\beta = 3a^2 - 3$

∴ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3a^2 + 6$，

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 27a$，

$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = -9a^4 + 72a^2 + 18$

①に代入して，bをaで表すと，$S = -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2}$

∴ $S = -\frac{9}{4}\left\{(a^2 - 1)^2 - 3\right\}$

$-1 < a < 1$ より，$0 \leq a^2 < 1$

∴ $\underline{最小値\ \frac{9}{2}\ (a = 0 のとき)}$ //