

2015年 全学部2月3日 第4問


 数理解石井

4 放物線  $y = x^2 - 8x + 15$  と直線  $y = -2x + 4$  がある。放物線上を動く点を  $P$  とし、直線の  $x$  切片を点  $A$ 、 $y$  切片を点  $B$  とした場合、 $\triangle PAB$  の面積  $S$  の最小値を求めよ。

$$P(t, t^2 - 8t + 15) \text{ とおくと, } A(2, 0), B(0, 4)$$

$$\text{直線 } AB: y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$$

線分  $AB$  を底辺としたときの  $\triangle PAB$  の高さ  $h$  は

点と直線のキヨリ公式より

$$\begin{aligned} h &= \frac{|2t + t^2 - 8t + 15 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|t^2 - 6t + 11|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|(t-3)^2 + 2|}{\sqrt{5}}$$

$$= (t-3)^2 + 2$$

$\therefore S$  の最小値は  $2$  ( $t=3$  のとき)

