2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ Oを原点とする座標空間の2点 P$(\cos t,\ \sin t,\ 0)$，Q$(\cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos t)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ とする．

(1) 2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は平行でないことを示せ．

(2) 三角形OPQの面積 $S(t)$ は t の値に関係なく一定であることを示せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 $\theta(t)$ のとる値の範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}$ と仮定すると，$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k が存在する

$\therefore (\cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos t) = k(\cos t,\ \sin t,\ 0)$

第3成分を比較して，$\cos t = 0$ $\therefore 0 \leqq t \leqq 2\pi$ より $t = \frac{\pi}{2}$ または $t = \frac{3}{2}\pi$

このとき 第1成分は，$\cos 2t = -1$，$k\cos t = 0$ より $\cos 2t \neq k\cos t$

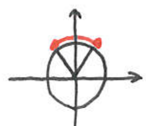
となり成り立たない $\therefore \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ は平行ではない ▨

(2)
$$S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot(1+\cos^2 t) - (\cos t\cos 2t + \sin t \sin 2t)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2 t - \cos^2 t}$$
$$= \frac{1}{2}\ (一定)$$ ▨

(3)
$$\cos\theta(t) = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}$$
$$= \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

微分した方が よいかも

$$\cos^2\theta(t) = \frac{\cos^2 t}{1+\cos^2 t}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+\cos^2 t}$$



十分性を示すために等号成立条件を調べた

等号は $t=0$ のとき　等号は $t=\pi$ のとき

$\therefore 0 \leqq \cos^2\theta(t) \leqq \frac{1}{2}$ より $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \cos\theta(t) \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta(t)$ は2つのベクトルのなす角なので，$0 \leqq \theta(t) \leqq \pi$ で考えてよいので，$\underline{\frac{\pi}{4} \leqq \theta(t) \leqq \frac{3}{4}\pi}$ //