奈良県立医科大学

2012年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 整数 m が与えられたとき，x に関する整数係数の2つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が関係式

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$$

を満たすとは，等式 $f(x)-g(x)=mh(x)$ を満たすような整数係数の整式 $h(x)$ が存在することである．

(1) $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ を整数係数の整式とする．もし，ある整数 m について関係式 $f(x) \equiv g(x) \pmod{m}$，かつ $F(x) \equiv G(x) \pmod{m}$ が満たされるならば，関係式 $f(x)+F(x) \equiv g(x)+G(x) \pmod{m}$，かつ $f(x)F(x) \equiv g(x)G(x) \pmod{m}$ が満たされることを証明せよ．

(2) 正整数 p (>1) を素数とする．p より小さい任意の正整数 i に対して二項係数 ${}_p\mathrm{C}_i$ は p の倍数であることを証明せよ．

(3) 正整数 p (>1) を素数とする．任意の正整数 n について，関係式

$$(1+x)^{p^n} \equiv 1+x^{p^n} \pmod{p}$$

が満たされることを証明せよ．

(4) 正整数 p (>1) を素数とし，n を2以上の正整数とする．$n-1$ 個の二項係数 ${}_n\mathrm{C}_i$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ がすべて p の倍数であるための必要十分条件は，整数 n が素数 p の正べきである（すなわち，適当な正整数 k を用いて $n=p^k$ と表せる）ことを証明せよ．