2015年 教育学部 第6問

$\boxed{6}$ 関数 $f(x) = \cos^3 x \sin x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = \sin 2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x) = (\cos^3 x)' \sin x + \cos^3 x \cdot \cos x$

$= 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x + \cos^4 x$

$= \cos^2 x (\cos^2 x - 3\sin^2 x)$

$= \cos^2 x (4\cos^2 x - 3)$

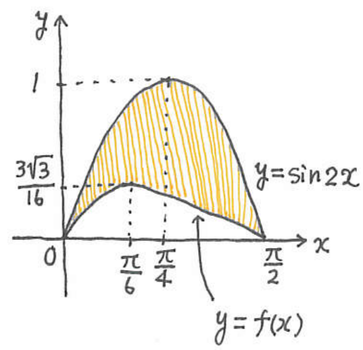
$= 4\cos^2 x \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0

極大

右の増減表より，最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ $\left(x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき}\right)$ //

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき．



$\sin 2x - f(x) = 2\sin x \cos x - \cos^3 x \sin x$

$= \sin x \cos x (2 - \cos^2 x)$

$\geqq 0 \quad (\because\ 0 \leqq \cos x \leqq 1 \text{ より})$

$\therefore\ \sin 2x \geqq f(x)$

$\therefore\ S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos^3 x \sin x \, dx$

$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$ //