



2013年 第1問

 数理
石井K

1 以下の問いに答えよ。

- (1) $\sqrt{11}$ の整数部分を a 、小数部分を b とする。 $\frac{1}{b} + \frac{a}{2}$ の値を求めよ。
 (2) $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ のとき、 $\frac{x^{10} - 1}{x^5}$ の値を計算せよ。
 (3) $a_1 = 2$ 、 $a_{n+1} + 3a_n = 4$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定まる数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ。

$$(1) 3 = \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \text{ より } a = 3, b = \sqrt{11} - 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{b} + \frac{a}{2} &= \frac{1}{\sqrt{11} - 3} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{11} + 3}{(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{2} + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{x} &= \frac{2}{\sqrt{13} + 3} \\ &= \frac{2(\sqrt{13} - 3)}{(\sqrt{13} + 3)(\sqrt{13} - 3)} \\ &= \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \\ \therefore x - \frac{1}{x} &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^{10} - 1}{x^5} &= x^5 - \left(\frac{1}{x}\right)^5 \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left\{ x^4 + x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right\} \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 1 + x^2 + \frac{1}{x^2} \right\} \\ \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 11 \\ \therefore \frac{x^{10} - 1}{x^5} &= 3 \cdot \{ 11^2 - 1 + 11 \} \\ &= \underline{393} \end{aligned}$$

$$(3) a_{n+1} - 1 = -3(a_n - 1)$$

\therefore 数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 1$ 、公比 -3 の等比数列

$$\therefore a_n - 1 = (-3)^{n-1} \quad \therefore \underline{a_n = 1 + (-3)^{n-1}}$$