

2015年工学域(中期)第5問

5 座標平面上において、原点 O を中心とする半径 1 の円 C_0 に、半径 1 の円 C_1 が外接しながらすべることなく回転する。点 A を動く円 C_1 の中心とし、点 P を円 C_1 の円周上の定点とする。最初、点 A は座標 $(2, 0)$ の位置にあり、点 P は座標 $(1, 0)$ の位置にある。円 C_1 が円 C_0 の周りを反時計まわりに一周し、点 A が座標 $(2, 0)$ に戻ってくるとき、点 P のえがく曲線を C とする。動径 OA が x 軸の正の部分から角 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) だけ回転した位置にあるとき、点 P の座標を $(x(\theta), y(\theta))$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(x(\theta), y(\theta))$ について、

$$x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta, \quad y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta$$

が成り立つことを示せ。

(2) 導関数 $\frac{d}{d\theta}x(\theta)$ を求め、 $x(\theta)$ の θ に関する増減表を作成せよ。ただし、凹凸については言及しなくてよい。

(3) 曲線 C で囲まれる図形の面積 S を求めよ。