長崎大学

2016年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 1辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHがある．下の図1のように，2辺BC，CD上に，BS = CT = x ($0 \leqq x \leqq 2$) を満たす点S，Tをとる．このとき，三角形ESTの面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．

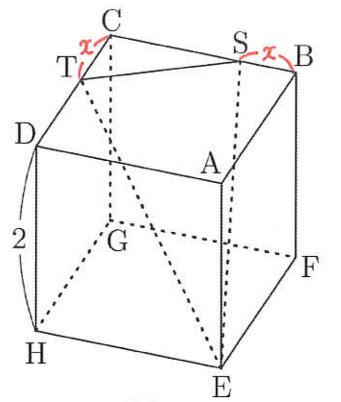

図1

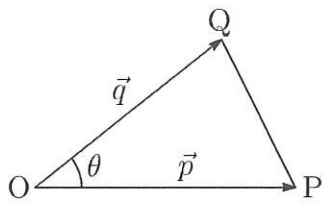

図2

(1) 上の図2を参考にして，三角形OPQにおいて $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$，$\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とおくとき，三角形OPQの面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

(2) $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$，$\overrightarrow{EH} = \vec{b}$，$\overrightarrow{EA} = \vec{c}$ とおく．立方体の1辺の長さが2であることに注意して，$\overrightarrow{ES}$，$\overrightarrow{ET}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{ES}|^2$，$|\overrightarrow{ET}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ．さらに，$\overrightarrow{ES}$ と $\overrightarrow{ET}$ の内積 $\overrightarrow{ES}\cdot\overrightarrow{ET}$ は，x によらない一定の値になることを示せ．

(3) 上の(1)を利用して三角形ESTの面積 $f(x)$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値も答えよ．

(1) $\triangle OPQ = \frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\cos^2\theta}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$ ▨

(2) $\underline{\overrightarrow{ES} = \vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} + \vec{c}\ ,\ \overrightarrow{ET} = \frac{2-x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$ //

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ なので

$|\overrightarrow{ES}|^2 = |\vec{a}|^2 + \frac{x^2}{4}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

$= \underline{x^2+8}$ //

$|\overrightarrow{ET}|^2 = (1-\frac{x}{2})^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

$= \underline{x^2-4x+12}$ //

$\overrightarrow{ES}\cdot\overrightarrow{ET} = (\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} + \vec{c})\cdot(\frac{2-x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$= 2(2-x) + 2x + 4$

$= \underline{8}$ //

(3) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{ES}|^2|\overrightarrow{ET}|^2 - (\overrightarrow{ES}\cdot\overrightarrow{ET})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)(x^2-4x+12) - 8^2}$

$= \underline{\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 8}}$ //

長崎大学

2016年 医学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 1辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHがある．下の図1のように，2辺BC，CD上に，BS = CT = x ($0 \leqq x \leqq 2$) を満たす点S，Tをとる．このとき，三角形ESTの面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．

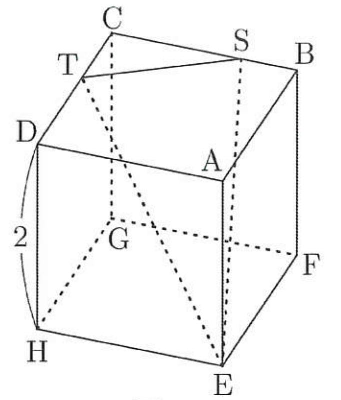

図1

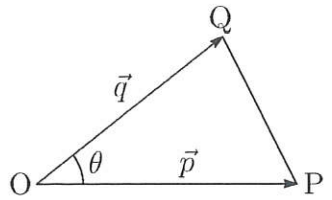

図2

(1) 上の図2を参考にして，三角形OPQにおいて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とおくとき，三角形OPQの面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \vec{c}$ とおく．立方体の1辺の長さが2であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ．

(3) 上の(1)を利用して三角形ESTの面積 $f(x)$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値も答えよ．

(4) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 8$ ($0 \leqq x \leqq 2$) とおくと，

$$g'(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 8$$
$$= (x-1)(x^2 - 2x + 8)$$
$$= (x-1)\{(x-1)^2 + 7\}$$

∴ 増減表は右のようになる．

x	0	…	1	…	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	8	↘	$\frac{17}{4}$	↗	8

∴ $g(x)$ の最大値は 8 ($x = 0, 2$ のとき)，最小値は $\frac{17}{4}$ ($x = 1$ のとき)

∴ $f(x)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ ($x = 0, 2$ のとき)

最小値は $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ($x = 1$ のとき)