



2015年 歯学・工学部 第2問

2 ひし形の紙がある (図1). 点線で半分に折ると正三角形になった (図2). これを少し開いて机の上に立てると, 三角錐の形になる (図3). その高さを次のようにして求めたい.

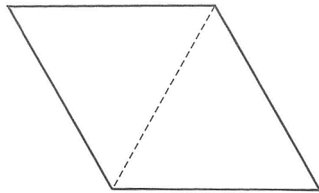


図1

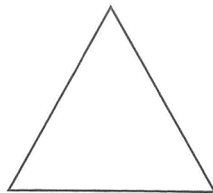


図2

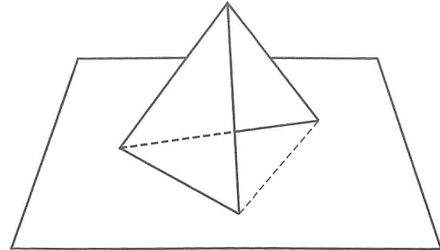


図3

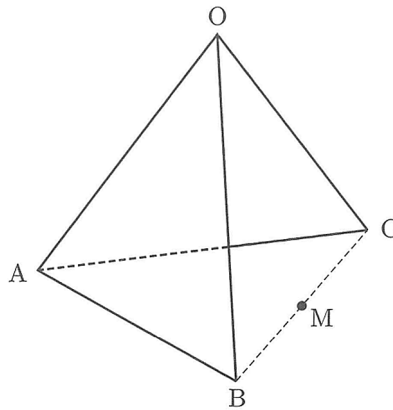


図4 (図3の拡大図)

図4において, 2つの正三角形 OAB と OAC の1辺の長さを1とする. 点Oと平面 ABC の距離が, 三角錐 OABC の高さになる. 空間ベクトルを利用してこの高さを求める. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\angle BOC = \theta$ とおき, 線分 BC の中点を M とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) \vec{OM} と \vec{AM} を, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ.
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と $\vec{a} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ. また, $|\vec{b} + \vec{c}|^2$ の値を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (3) 実数 t に対して $\vec{OH} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM}$ とおくと, 点 H は直線 AM 上にある. このとき, $\vec{OH} \perp \vec{BC}$ が成り立つことを示せ. さらに, H が $\vec{OH} \perp \vec{AM}$ を満たす点であるとき, t の値を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (4) 三角錐 OABC の高さを h とする. h を $\cos \theta$ を用いて表せ. さらに, $\vec{OM} \perp \vec{AM}$ が成り立つとき, θ と h の値を求めよ.